ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1986

PREMIERE INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA : Les sept sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans cette épreuve comme dans toutes celles qui suivront, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

»»»»»»»»»»»o«««««««««««

SUJET N° 1

Un espace vectoriel réel est un espace vectoriel défini sur le corps des réels.

Soient trois espaces vectoriels réels X, Y, Z de dimensions p, q, r. Suivant une notation connue, L(X, Y) par exemple, désigne l'ensemble des applications linéaires définies sur X et à valeurs dans Y. Donc on rencontrera les notations L(X,Y), L(X,Z),...

Soient $u \in L(X,Y)$ et $v \in L(Y,Z)$. On définit w par $w = v \circ u$.

On rappelle également que u(X) se note Im u et $u^{-1}(\{\vec{0}\})$ se note Ker u.

On considère la restriction $\tilde{v}$ de v à Im u ; donc pour tout $\vec{y} \in$ Im u on a : $\tilde{v}(\vec{y}) = v(\vec{y})$.

1 – Préciser Ker $\tilde{v}$ et Im $\tilde{v}$ à l'aide de Ker v et Im v.

2 – A-t-on : $\text{rang}(u) + \text{rang}(v) - q \leqslant \text{rang}(w)$?

3 – Donner un exemple ou l'inégalité stricte est vraie.

SUJET N° 2

Soient deux endomorphismes u et v définis sur un espace vectoriel réel X de dimension finie n.

On considère la proposition suivante :

« Si pour tout $\vec{x} \in X$ il existe un réel $\lambda(\vec{x})$ et que $v(\vec{x}) = \lambda(\vec{x}) \cdot u(\vec{x})$, alors il existe un réel λ tel que $v = \lambda \cdot u$ ».

Cette proposition est-elle vraie dans chacun des cas suivants :

1/ $n = 1$
2/ $n = 2$ et u injectif.
3/ $2 < n$ et u injectif.
4/ n quelconque et u non injectif.

Tournez la page S. V. P.

SUJET N° 3

1– Soit (p, q) un couple de réels, et A la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2p + 2q(p-1) & (p-q)(p-1) & (p-q)(p-1) \\ 2(p-q) & p(p-1)+q(p+1) & (p-q)(p-1) \\ 2(p-q) & (p-q)(p-1) & p(p-1)+q(p+1) \end{bmatrix}$$

Calculer le polynôme caractéristique $\alpha(X)$ de A.

2– Décomposer α en produit de trois polynômes du premier degré à coefficients réels.

3– Déterminer, pour chacune des valeurs propres ainsi mises en évidence, les vecteurs propres associés. La matrice A est-elle diagonalisable ?

SUJET N° 4

Construire la courbe Γ définie en coordonnées polaires par : $\rho = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3} - 2\cos\theta}$

SUJET N° 5

a désigne une constante positive donnée $(0 < a)$.

On munit $\mathbb{R}^2$ euclidien d'un repère orthonormé d'axes Ox et Oy et on considère le cercle (C) d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

Deux points P et Q décrivent l'axe des y de façon que $\overline{OQ} = 2\,\overline{OP}$.

De P et Q on peut en général mener deux tangentes à (C) autres que Oy, et se coupant en M.

Déterminer l'ensemble Γ des positions de M quand P décrit l'axe des y. Préciser la nature de Γ.

SUJET N° 6

Soit P(X) le polynôme réel défini par :

$$P(X) = (X^2+1)^n \frac{d^{n-1}}{dX^{n-1}} \left[\frac{X - \cot\varphi}{1+X^2}\right]$$

Montrer que P est de degré n, et déterminer les racines de P (on rappelle que $\cot\varphi$ est l'inverse de la tangente du réel φ).

SUJET N° 7

Soit k un paramètre réel. On considère dans un repère orthonormé d'axes Ox et Oy la conique C_k d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2kxy + 2(ky - x) = 0 .$$

1– Préciser la nature de C_k lorsque k varie.

2 – Donner la direction des axes de C_k.

3– Donner le centre de courbure Ω_k à C_k au point (0, 0) et construire le lieu décrit par Ω_k lorsque k varie.

»»»»»»»»»»o«««««««««